

期末レポート

“円筒型スペース・コロニーの距離分布”

×学専攻 修士1年 野比のび太
学籍番号 8042XXXX

200X年1月20日

1 はじめに

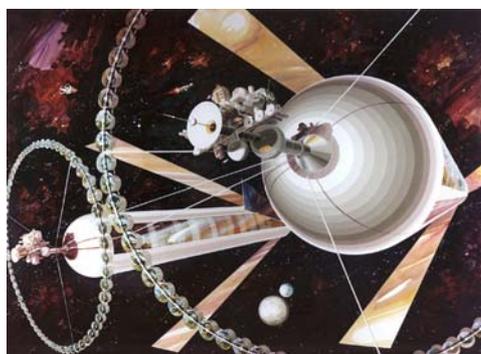
宇宙都市-スペース・コロニー^{*1}という概念は、1974年アメリカのプリンストン大学教授 G.K. オニール博士によって初めて提唱された。このスペース・コロニー計画は、今人類が直面している重要な問題の一つである“人口爆発”に対する究極の解決手段として期待されている。つまり、200年前にヨーロッパ人がアメリカ大陸に移住したのと同様、宇宙空間へ進出することでこの問題を乗り切ろうという発想である。もちろん、早々に大規模なスペース・コロニーを開発してそこに移住することが、本当に人口問題や、それに付随する食料・エネルギー問題の解決になるのかなど、慎重に議論すべき点は多い。しかし、“もし”スペース・コロニーが建設されたならば、そこはどのような都市になるのだろうか。本稿の目的は、この素朴な知的好奇心に対して、距離分布という観点から応えてみようというものである。

具体的なスペース・コロニーの形状としては、トーラス形、球形、円筒形などが提案されているが、今回は最も実現性が高いと言われる円筒型スペース・コロニーを想定した。まず第2節、第3節では、円筒型スペース・コロニーの構造について解説をした上で、ごく単純な想定の下での距離の分布と特性値を導出する。具体的には、円筒の側面部分にトリップの起点と終点が(互いに独立に)一様に分布するものとし、移動はコロニー内の測地線距離で行われるとした。続く第4節では、コロニーに居住不可能な領域がある場合の距離分布を導出する。詳細は後述するが、円筒型スペース・コロニーには太陽の光を内部に取り入れるため、いくつかのガラス面が設置されている。第4節のモデルは、この構造を忠実に再現したものとなっている。

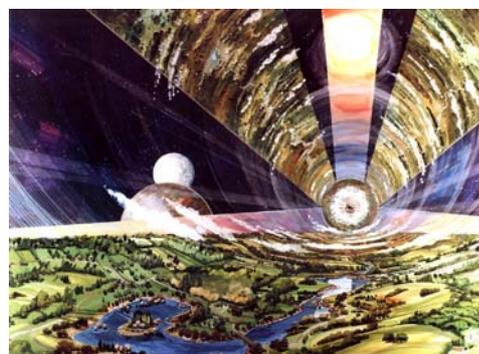
^{*1} Space Settlement とも言われる。人道的にはこちらを採用すべきであるが、本稿では日本での一般的な通称をそのまま用いた。

2 円筒型スペース・コロニーの構造

G.K. オニール博士が“Island 3”として提案したスペース・コロニーは、半径 3km、長さ 30km ほどの円筒型チューブである。コロニーはチューブを 2 分間に 1 回転させ、その遠心力で地球と同じ重力をつくりだす。すなわち、人々はチューブの内面にへばりつくような形で生活することになる。このチューブは、円周で 6 分割されており、人々が生活する陸地の部分と、採光のためのガラス面の部分が交互に配列されている。このようにすることで、それぞれの陸地の真上にガラス面が来ることになる。また、チューブの根元からは 3 枚のアルミ反射板が伸びていて、これがガラス面を通し太陽光を陸地へと誘導する。アルミ反射板は開いたり閉じたりすることで太陽の入射光を調節できるので、24 時間の昼夜サイクルが可能となる。図 1 にスペース・コロニーの想像図を示す。



(a) 外観



(b) 内部図

図 1 円筒型スペース・コロニー

3 基本モデルの構成

本節では、第 2 節の円筒型スペースコロニーをモデル化し、実際に距離の分布と特性値を導出する。

3.1 都市モデル

図 2 のような、半径 R 、長さ L の円筒を考える。まずは居住不可能領域 (ガラス面) の問題は無視して*2、移動の起点と終点が、円筒の側面に互いに独立かつ一様に分布しているとしよう。このとき 2 点間の測地線距離を g と定義し、その確率密度関数 $f(g)$ を導出したい。今、あるトリップの起点が P 、終点が Q で与えられたとする。ここで、 P を通過する母線 (図 2 の点線) がちょうど中央に来よう展開図を描いてみると図 3 を得る。すなわち、よく知られているように、円筒の側

*2 この仮定は第 4 節において緩和される。

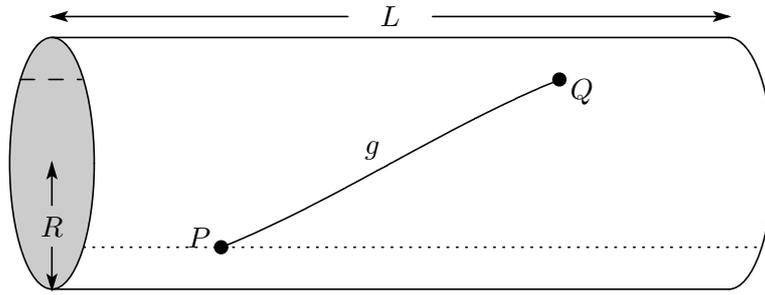


図2 都市モデル

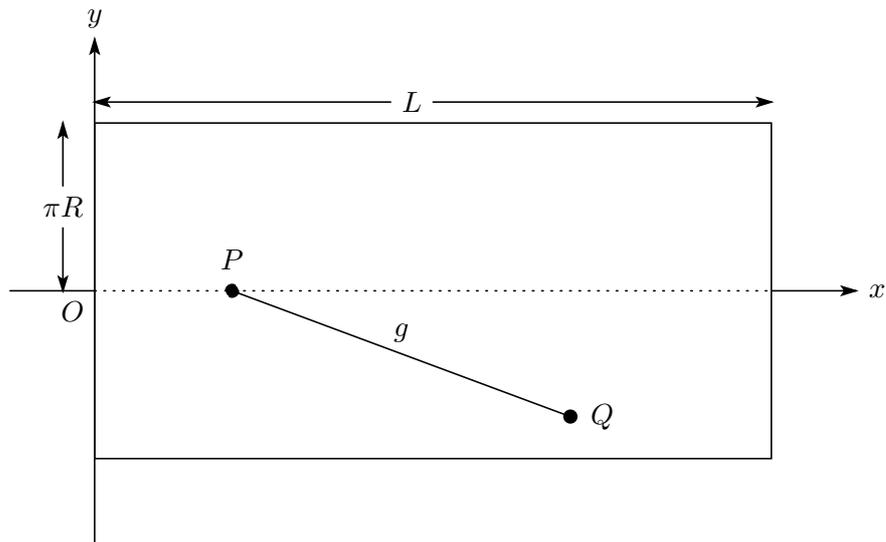


図3 展開図

面上における測地線は展開図上では直線となる。

3.2 距離分布 $f(g)$ の導出

図3を基に、確率密度関数 $f(g)$ の導出を行う。円筒の対象性より一般性を失うことなく、トリップの起点 P を図3の点線上に固定する。すると、終点 Q が円筒のどこに与えられようと、測地線距離 g は、そのまま図3での直線距離になる。

今、図3に示したように直交座標系を与え、 P, Q それぞれの座標を

$$P = (x_1, 0) \tag{1}$$

$$Q = (x_2, y_2) \tag{2}$$

とする。仮定より、 x_1, x_2 は区間 $(0, L)$ で互いに独立な一様分布に従っており、また、 y_2 は区間

$(-\pi R, \pi R)$ で一様分布に従う．そこで

$$X = |x_1 - x_2| \quad (3)$$

$$Y = |y_2| \quad (4)$$

とおくと，これらの確率密度関数 $f(X)$ ， $f(Y)$ は次のようになる：

$$f(X) = \frac{2(L-X)}{L^2} \quad (0 \leq X \leq L), \quad (5)$$

$$f(Y) = \frac{1}{\pi R} \quad (0 \leq Y \leq \pi R). \quad (6)$$

X と Y は独立と考えられるから X と Y の同時密度関数は (5) と (6) の積として以下のように表される：

$$f(X, Y) = \frac{2}{\pi L^2 R} (L - X). \quad (7)$$

ここで 2 点 P, Q の距離 g と X, Y の間には

$$g = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (8)$$

なる関係が成り立っているので，さらに θ を

$$\theta = \tan^{-1} \frac{Y}{X} \quad (9)$$

として (X, Y) を (g, θ) の極座標に変換する．すると

$$X = g \cos \theta, \quad (10)$$

$$Y = g \sin \theta, \quad (11)$$

$$[dX, dY] = g [dg, d\theta] \quad (12)$$

となるから (7) より g と θ の同時密度関数は次のようになる：

$$f(g, \theta) = \frac{2g}{\pi L^2 R} (L - g \cos \theta). \quad (13)$$

よって，これを θ に関して積分すれば g の周辺分布，すなわち求めたい g の確率密度関数が得られることになる． θ の積分範囲は図 4 に示すように， g の大きさによって次のように場合分けされる (便座上 $\pi R \leq L$ を仮定)：

$$(i) \quad 0 \leq g \leq \pi R \text{ のとき} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (14)$$

$$(ii) \quad \pi R \leq g \leq L \text{ のとき} \quad 0 \leq \theta \leq \sin^{-1} \frac{\pi R}{g} \quad (15)$$

$$(iii) \quad L \leq g \leq \sqrt{L^2 + (\pi R)^2} \text{ のとき} \quad \cos^{-1} \frac{L}{g} \leq \theta \leq \sin^{-1} \frac{\pi R}{g} \quad (16)$$

以上から計算して整理すると $f(g)$ は次の通りに得られる：

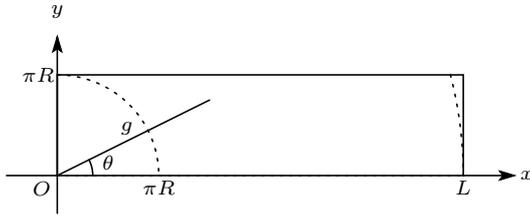


図4 g の長さによる場合分け

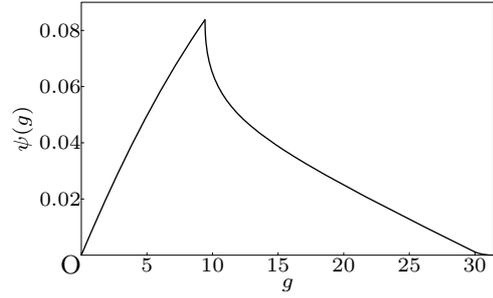


図5 $f(g)$ の概形 ($R = 3, L = 30$)

(i) $0 \leq g \leq \pi R$ のとき

$$f(g) = \frac{g}{LR} \left(1 - \frac{2g}{\pi L}\right); \quad (17)$$

(ii) $\pi R \leq g \leq L$ のとき

$$f(g) = \frac{2g}{L} \left(\frac{1}{\pi R} \sin^{-1} \frac{\pi R}{g} - \frac{1}{L} \right); \quad (18)$$

(iii) $L \leq g \sqrt{L^2 + (\pi R)^2}$ のとき

$$f(g) = \frac{2g}{\pi LR} \left\{ \left(\sin^{-1} \frac{\pi R}{g} - \cos^{-1} \frac{L}{g} \right) - \frac{1}{L} \left(\pi R - \sqrt{g^2 - L^2} \right) \right\}. \quad (19)$$

確率密度関数 $f(g)$ の概形を図5に示す ($R = 3, L = 30$) . また, g の平均値 $\langle g \rangle$, ならびに2乗の平均値 $\langle g^2 \rangle$ を算出すると次の通りである (分散はこれら2つから導出可能なので省略) :

$$\langle g \rangle = \frac{1}{12\pi L^2 R} \left\{ 2\pi^4 R^4 + \pi R (3L^2 - 2\pi^2 R^2) \sqrt{L^2 + \pi^2 R^2} - 4\pi^3 L R^3 \log \frac{\pi R}{L + \sqrt{L^2 + \pi^2 R^2}} + L^4 \log \frac{\pi R + \sqrt{L^2 + \pi^2 R^2}}{L} \right\}, \quad (20)$$

$$\langle g^2 \rangle = \frac{1}{6} (L^2 + 2\pi^2 R^2). \quad (21)$$

4 居住不可能領域を考慮に入れた場合

前節では, トリップの起点と終点が円筒の側面に互いに独立かつ一様に分布しているという想定の下で, 距離分布の導出を行った. しかしながら, 第2節で述べたように, 本来スペース・コロニーの内部は陸地とガラス面が交互に配列されている. そこで本節では, ガラス面に相当する居住不可能領域が存在する場合の距離分布を導出する.

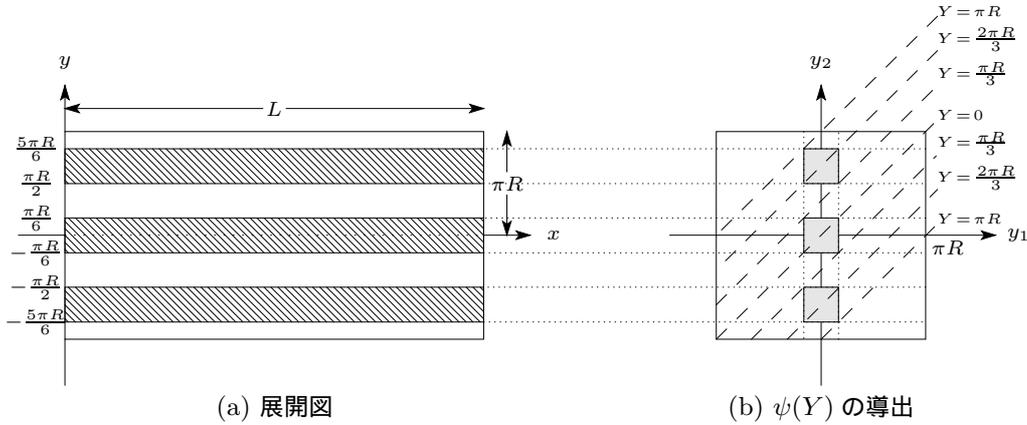


図 6 展開図

4.1 都市モデル

第 3 節と同様，半径 R ，長さ L の円筒を考える．ただし，本節では移動の起点と終点が側面全体では無く，図 6-(a) の展開図の斜線部分に（互いに独立かつ一様に）分布しているとする．斜線部分は，コロニーの構造に倣い，円周を 6 分割した上で居住が可能な領域と不可能な領域を交互に配列することで設定した．以下，任意の 2 点間の測地線距離 g の確率密度関数 $\psi(g)$ を導出する．

図 6-(a) に示したよう展開図に直角座標系 (x, y) を与え，トリップの起点 P と終点 Q それぞれの座標を

$$P = (x_1, y_1) \quad (22)$$

$$Q = (x_2, y_2) \quad (23)$$

で与える．ここで円筒の対象性より一般性を失うことなく，トリップの起点 P を図 6-(a) の中央の斜線部分，すなわち $-\frac{\pi R}{6} \leq y_1 \leq \frac{\pi R}{6}$ に固定する．すると，終点 Q が斜線部分のどこに与えられようと，測地線距離 g はそのまま図 6-(a) における直線距離になる．

さて，先ほどと同様に

$$X = |x_1 - x_2| \quad (24)$$

$$Y = |y_1 - y_2| \quad (25)$$

と置き，これらの確率密度関数 $\psi(X)$ ， $\psi(Y)$ を導出することで $\psi(g)$ を導きたい． $\psi(X)$ については，仮定より x_1, x_2 が区間 $(0, L)$ で互いに独立な一様分布となっているので

$$\psi(X) = \frac{2(L - X)}{L^2} \quad (0 \leq X \leq L) \quad (26)$$

とすぐに求まる．一方， $\psi(Y)$ は y_1 と y_2 の定義域が一致しないため，いくつかの場合分けが必要

となる．それを示したものが図 6-(b) である．すなわち y_1, y_2 は，それぞれ

$$y_1 \in \left\{ y \mid -\frac{\pi R}{6} \leq y \leq \frac{\pi R}{6} \right\} \quad (27)$$

$$y_2 \in \left\{ y \mid -\frac{5\pi R}{6} \leq y \leq -\frac{\pi R}{2}, -\frac{\pi R}{6} \leq y \leq \frac{\pi R}{6}, \frac{\pi R}{2} \leq y \leq \frac{5\pi R}{6} \right\} \quad (28)$$

で定義されるので， y 軸方向に関する全てのトリップの集合は図 6-(b) の塗りつぶされた部分となる（なお， y_1, y_2 は互いに独立かつそれぞれの定義域で一様）．計算過程は割愛するが， $\psi(Y)$ を実際に導出すると，以下を得る（図 7）：

(a) $0 \leq Y \leq \frac{\pi R}{3}$ ならば

$$\psi(Y) = \frac{3}{\pi^2 R^2} \left(-2Y + \frac{2\pi R}{3} \right); \quad (29)$$

(b) $\frac{\pi R}{3} \leq Y \leq \frac{2\pi R}{3}$ ならば

$$\psi(Y) = \frac{3}{\pi^2 R^2} \left(2Y - \frac{2\pi R}{3} \right); \quad (30)$$

(c) $\frac{2\pi R}{3} \leq Y \leq \pi R$ ならば

$$\psi(Y) = \frac{3}{\pi^2 R^2} (-2Y + 2\pi R). \quad (31)$$

X と Y は独立と考えられるから X と Y の同時密度関数は以下のように表される：

$$\psi(X, Y) = \psi(X) \cdot \psi(Y). \quad (32)$$

そこで，(8)～(12) の手順を用いて $\psi(X, Y)$ を $\psi(g, \theta)$ の極座標表示に変換すると次の通り：

(a) $0 \leq \theta \leq \sin^{-1} \frac{\pi R}{3g}$ ならば

$$\psi(g, \theta) = \psi_a = \frac{6}{\pi^2 L^2 R^2} \left(g^2 \sin 2\theta - \frac{2\pi R}{3} g \cos \theta - 2Lg \sin \theta + \frac{2\pi LR}{3} \right); \quad (33)$$

(b) $\sin^{-1} \frac{\pi R}{3g} \leq \theta \leq \sin^{-1} \frac{2\pi R}{3g}$ ならば

$$\psi(g, \theta) = \psi_b = \frac{6}{\pi^2 L^2 R^2} \left(-g^2 \sin 2\theta + \frac{2\pi R}{3} g \cos \theta + 2Lg \sin \theta - \frac{2\pi LR}{3} \right); \quad (34)$$

(c) $\sin^{-1} \frac{2\pi R}{3g} \leq \theta \leq \sin^{-1} \frac{\pi R}{g}$ ならば

$$\psi(g, \theta) = \psi_c = \frac{6}{\pi^2 L^2 R^2} (g^2 \sin 2\theta - 2\pi R g \cos \theta - 2Lg \sin \theta + 2\pi LR). \quad (35)$$

よって，これを θ に関して積分すれば確率密度関数 $\psi(g)$ が得られる．第 3 節のモデルと $\max X$ ， $\max Y$ 共に等しいので θ の積分範囲は

$$(i) \ 0 \leq g \leq \pi R \text{ のとき} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (36)$$

$$(ii) \ \pi R \leq g \leq L \text{ のとき} \quad 0 \leq \theta \leq \sin^{-1} \frac{\pi R}{g} \quad (37)$$

$$(iii) \ L \leq g \sqrt{L^2 + (\pi R)^2} \text{ のとき} \quad \cos^{-1} \frac{L}{g} \leq \theta \leq \sin^{-1} \frac{\pi R}{g} \quad (38)$$

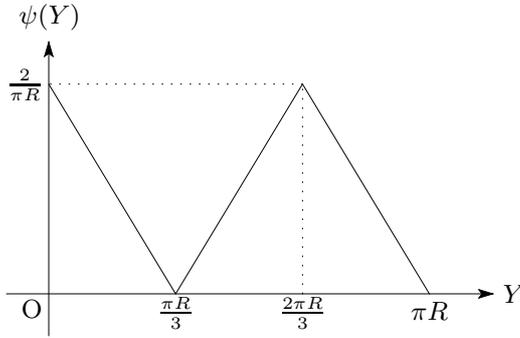


図7 $\psi(Y)$ の概形

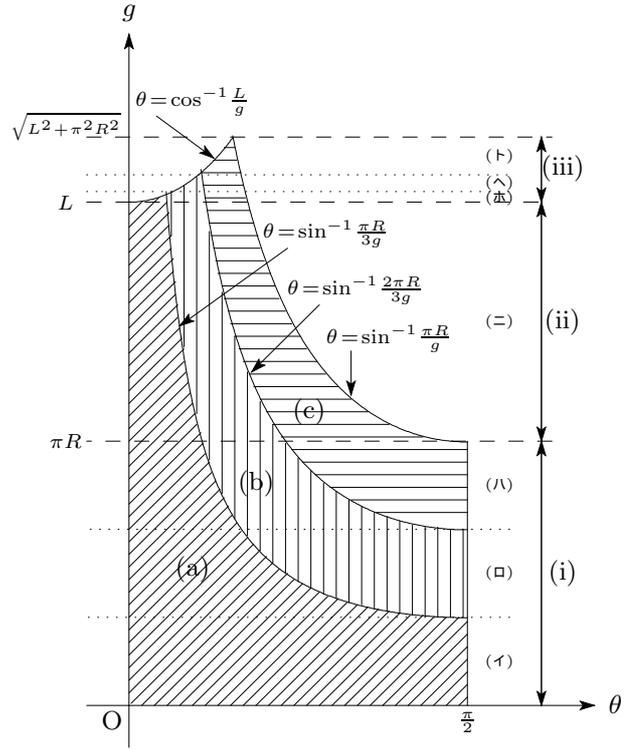


図8 $\psi(g)$ 導出のための場合分け

である ($\pi R \leq L$ を仮定) . ただし , $\psi(g, \theta)$ は前出の通りいくつかの場合分けをもつから , 計算の際には非積分関数ならびに積分範囲に注意しなければならない . それを示すのが図8の $g-\theta$ 平面であり , $\psi(g)$ は (イ) ~ (ト) の7通りに分けて記述されることになる . これらは全て解析的に導出できるものの非常に煩雑な形となるので , ここでは積分形のまま示す :

(イ) $0 \leq g \leq \frac{\pi R}{3}$ のとき

$$\psi(g) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi_a(g, \theta) d\theta; \quad (39)$$

(ロ) $\frac{\pi R}{3} \leq g \leq \frac{2\pi R}{3}$ のとき

$$\psi(g) = \int_0^{\sin^{-1} \frac{\pi R}{3g}} \psi_a(g, \theta) d\theta + \int_{\sin^{-1} \frac{\pi R}{3g}}^{\frac{\pi}{2}} \psi_b(g, \theta) d\theta; \quad (40)$$

(ハ) $\frac{2\pi R}{3} \leq g \leq \pi R$ のとき

$$\psi(g) = \int_0^{\sin^{-1} \frac{\pi R}{3g}} \psi_a(g, \theta) d\theta + \int_{\sin^{-1} \frac{\pi R}{3g}}^{\sin^{-1} \frac{2\pi R}{3g}} \psi_b(g, \theta) d\theta + \int_{\sin^{-1} \frac{2\pi R}{3g}}^{\frac{\pi}{2}} \psi_c(g, \theta) d\theta; \quad (41)$$

(ニ) $\pi R \leq g \leq L$ のとき

$$\psi(g) = \int_0^{\sin^{-1} \frac{\pi R}{3g}} \psi_a(g, \theta) d\theta + \int_{\sin^{-1} \frac{\pi R}{3g}}^{\sin^{-1} \frac{2\pi R}{3g}} \psi_b(g, \theta) d\theta + \int_{\sin^{-1} \frac{2\pi R}{3g}}^{\sin^{-1} \frac{\pi R}{g}} \psi_c(g, \theta) d\theta; \quad (42)$$

(ホ) $L \leq g \leq \sqrt{L^2 + \frac{\pi^2 R^2}{9}}$ のとき

$$\psi(g) = \int_{\cos^{-1} \frac{L}{g}}^{\sin^{-1} \frac{\pi R}{3g}} \psi_a(g, \theta) d\theta + \int_{\sin^{-1} \frac{\pi R}{3g}}^{\sin^{-1} \frac{2\pi R}{3g}} \psi_b(g, \theta) d\theta + \int_{\sin^{-1} \frac{2\pi R}{3g}}^{\sin^{-1} \frac{\pi R}{g}} \psi_c(g, \theta) d\theta; \quad (43)$$

(ヘ) $\sqrt{L^2 + \frac{\pi^2 R^2}{9}} \leq g \leq \sqrt{L^2 + \frac{\pi^2 R^2}{4}}$ のとき

$$\psi(g) = \int_{\cos^{-1} \frac{L}{g}}^{\sin^{-1} \frac{2\pi R}{3g}} \psi_b(g, \theta) d\theta + \int_{\sin^{-1} \frac{2\pi R}{3g}}^{\sin^{-1} \frac{\pi R}{g}} \psi_c(g, \theta) d\theta; \quad (44)$$

(ト) $\sqrt{L^2 + \frac{\pi^2 R^2}{4}} \leq g \leq \sqrt{L^2 + \pi^2 R^2}$ のとき

$$\psi(g) = \int_{\cos^{-1} \frac{L}{g}}^{\sin^{-1} \frac{\pi R}{g}} \psi_c(g, \theta) d\theta. \quad (45)$$

また, $\psi(g)$ の概形を図 9 に示す ($R = 3, L = 30$).

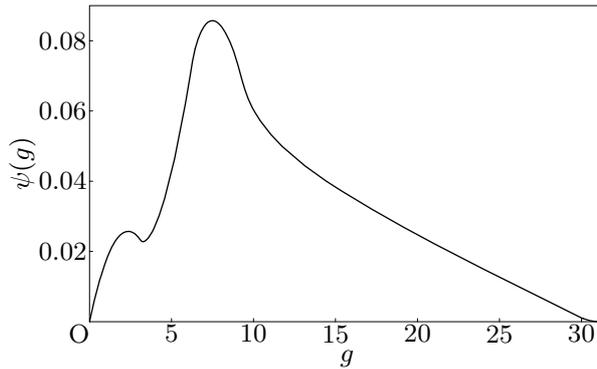


図 9 $\psi(g)$ の概形 ($R = 3, L = 30$)

5 まとめ

本稿では, 円筒の側面上に人々が居住している想定の下で測地線距離の密度分布を導出し, 円筒型スペース・コロニーの移動効率に対し定量的評価を行った. その際, コロニーのガラス面に当たる居住不可能領域の存在を考慮に加え, 距離分布が双峰となることを示した. これは移動が単一の陸地内で閉じている場合とそうでない場合で距離が大きく変化するためであり, 円筒型スペース・コロニーの特徴を示す重要な知見であると考えられる. 今後の展開としては, 都市内の総移動距離を最小化するコロニーのプロポーション導出などが挙げられるだろう.

参考文献

[1] G.K. オニール (1981): スペース・コロニー 2081, PHP 研究所.

- [2] 腰塚武志 (1976) : 積分幾何学について (4) , オペレーションズ・リサーチ , Vol.21 , pp711-717 .
- [3] 大林辰蔵 (1984) : 宇宙をめざして-スペース・コロニーの建設- , 同文書院 .