

11 離散選択モデル

11.1 はじめに

我々の日々の行動は、「複数のものの中から、どれか1つを選ぶ」という行動に満ち溢れている。試みに、ある早大生 W 君の典型的な1日を観察し、いくつかの選択行動を取り出してみよう：

例 11.1 ちょっと寝坊して起きてしまった！危ない、危ない。さて、急いで着ていく服を決めないと・・・

→ (1. 今日はカジュアルにパーカーで。 2. たまにはジャケットでキメてみようかな。)

例 11.2 ちょっと遠い最寄り駅。さて、どうやって行こうか・・・

→ (1. いつもと同じく徒歩で。 2. 駐輪代金がかかるけど自転車で。 3. ここは一か八かバスを使って。)

例 11.3 タイミング良く急行電車が来た！でも通勤ラッシュで混んでいる。一本待って空いてる普通電車にしようか・・・

→ (1. 迷ってはいられないので急行でギュウギュウ詰め。 2. 時間が気になるけど次の各駅停車にしよう。)

例 11.4 大学に着いた！でも改札までのエスカレータが混んでいる・・・

→ (1. 仕方ない、並んでエスカレータに乗ろう。 2. 少し長いけど、ここは健康的に階段を使おう。)

例 11.5 今日の講義は、いつも興味深く楽しみにしている。さて、どこに座ろうか・・・

→ (1. 先生の話をよく聞きたいから最前列に！ 2. でも、当てられたら困るなあ、ちょっと後ろに座ろう。)

例 11.6 さぁお昼の時間だ！でも、いつも昼食に困るのがこのキャンパス。さて、どこで食べようか・・・

→ (1. 並んでいるけど栄養満点の学食へ。 2. ちょっと高いけど、近くの定食屋さんへ。 3. 量が少ないのが不満だけど、お弁当を買って済ませよう。)

例 11.7 講義も全て終わった。さて、サークルに寄っていこうかな・・・

→ (1. 早く部室に行って皆と雑談しよう！ 2. でもテストが近いんだよなあ、やっぱり帰って勉強しよう。)

ちょっとしたシミュレーション・ゲーム風 (The Sims?!) に、思いついた選択行動を挙げてみたのだが、多少は違えど、多くの人が似たような経験をしたことがあるのではないだろうか。一見すると、上記の選択行動とオペレーションズリサーチの関係は、思いつかないかもしれない。しかしながら、冷静に考えると、例 11.2 は「駐輪場をどの程度、整備すれば良いのか」、例 11.4 は「急行と普通電車の最適ダイヤ編成」などに大きく関係していそうである。例 11.6 も「学食や定食屋さんの店長にとっては死活問題」となり得る。「人間による意思決定」の連続で、社会が成り立っていることを考えれば、選択行動を数理的に分析する重要性は容易に想像できよう。

したがって、社会に溢れている「人々の選択行動」は、重要なオペレーションズリサーチの対象と考えられ、適切なる数理モデルに基づいて分析する必要がある。このように、離散的に提示されたいくつかの候補の

中から、どの選択肢を選ぶかを分析するためのモデルとして、本章では「離散選択モデル」の基礎について解説する。

離散選択モデルは、様々な分野で活用されている：交通工学；経済学；マーケティング；心理学；生物学等々。そして、それらの分野で適用される問題は、枚挙に暇が無い。本テキストでは、そのような一例としてマーケティングにおける商圈分析への応用についても紹介する。

練習 11.1 「人々の選択行動」として捉えられる問題を一つ挙げ、その問題の概要、分析することの重要性について説明しなさい。

解答:

11.2 離散選択モデルのアイデア

上述のように、離散選択モデルは、人々の選択行動を数理モデルとして記述したものである。そこで定式化に先立ち、離散選択モデルがどのようなアイデアに基づいて定式化されているのか、その概要を整理しておく。

11.2.1 選択するとは、どういうことか

再び早大生 W 君に登場してもらい、いま、W 君がなんらかの選択を迫られている場面を想像してみよう。このとき、W 君の頭の中には、どのような行動をすべきか、「様々な選択肢」が思い描かれているはずである(例 11.1~7 の“→”以降が、それぞれの例における選択肢と言える)。すなわち、W 君は、

いくつかの選択肢の集合の中から、どれか 1 つの選択肢を選ぶ

ことを、試みているわけである。

では、W 君はどのように「1 つの選択肢を選ぶ」のだろうか。もちろん無意識に、あるいは直感的に選んでいる場合がほとんどであろうが、ここで考えるべきは、その無意識・直観的な選択を、なんらかの合理性を持って説明することである。離散選択モデルでは、この「1 つの選択肢を選ぶ」行動を記述するに当たり、

各選択肢について、「効用」—その選択肢を選んだときの満足度を数値化したもの—が存在する

ものと仮定する。言わば、無意識であれ明示的にであれ、W 君は、それぞれの選択肢を選んだらどのくらい嬉しいかが数値的に把握できているもの、とするわけである。このように想定しておく、どの選択肢が選ば

れるかの分析が容易となる。すなわち、W 君が合理的な選択をするのであれば、

もっとも「効用」の値が高い選択肢を、1 つ選ぶ

ものと考えることが自然であろう。言い換えると、W 君は、自身の効用—嬉しさや満足度の度合い—を最大化すべく各々の選択行動を行っている、と解釈できる。

11.2.2 確率変数としての効用

ここで問題となるのが、各選択肢の効用を把握することが可能か否か、という点である。仮に、各選択肢の効用が「正確に」判明しているものとしよう。このとき W 君がどの選択肢を選ぶのかは、直ちに判明する。仮定から明らかなように、W 君は「効用が最も大きい値を取る選択肢」を選ぶはずであり、また、私たちは各選択肢の効用の大小関係を、正確に把握できるためである。

しかし、残念ながら (当然ながら!?) 多くの場合、W 君が感じている効用を、寸分の狂いなく知り得ることは不可能である。各選択肢における効用の値は、それら選択肢の基礎的な特性・属性のみならず、そのとき置かれた状況や個人の性格・好みといった多岐に亘る要因が組み合わさり、決定されることが、予想されるからである。何より、W 君自身、各選択肢の効用がどの程度なのか、(例え潜在的には把握していても) 正確には説明できないかもしれない。

以上の議論は、分析に当り各選択肢の効用を一意に特定することが不可能なことを、示唆している。だからと言って、全く手掛かりがない訳ではない。例えば W 君が昼食として、1. ハンバーグ定食 (500 円, 800kcal.) と、2. カツ定食 (450 円, 800kcal.) のどちらを、選ぶようとしている状況を想定しよう。このとき、ハンバーグ定食・和定食の「効用」は、それぞれの価格に依存しているとは、考えられないだろうか。また、今回の場合たまたま同じ値であるが、各定食の効用は、それらの摂取カロリーにも関係しているはずである。これを数学的に言い換えれば、各定食の「効用」は、それぞれの「価格とカロリーの関数」として、記述できることを意味している。

効用関数を設定するに当り、もっとも素直な定式化は、各定食 ($j = 1, 2$) の価格を p_j , 摂取カロリーを q_j とし、その線形和

$$V_j = -a p_j + b q_j \quad (1)$$

を効用関数と見做すことだと思われる (a, b は正定数)。上記の V_j について、価格に対する係数が $-a$ となっている理由は、価格が高いほど、その選択肢 (定食) の効用は減少するもの、と想像されるためである。同様に、ここでは摂取カロリーが高いほど、選択肢 (定食) の効用も増加するもの、と仮定している。ただし、この V_j を、各選択肢 (定食) の効用そのものと見做すことは、適切では無い。仮に、効用が V_j で特定できるものとしてしまうと、W 君はカツ定食以外、絶対に選択しないことになってしまう (何故か?)。実際には、そのようなことは有り得ないので、最初に述べたように、各選択肢 (定食) の効用は、様々な特性や属性、好みなどにも影響していると思われる。今回の場合ならば、「各定食の美味しさ」や「お腹のもたれ具合」、「待ち行列の混み具合」なども、各選択肢 (定食) の効用に影響してくるはずである。

離散選択モデルでは、上述のような数値化が難しい、あるいは測定が困難な特性・要因を、効用に組み込むため、効用は確率的に変動する、という考え方を取り入れる。すなわち、選択に影響を及ぼしていることが予想されるが、効用関数として特定することが難しい様々な要因を、何らかの確率分布に従う確率変数 ϵ_j として効用関数に加え、各選択肢の効用 U_j を

$$U_j = V_j + \epsilon_j \quad (2)$$

と定義するのである．このような考え方は一般に、「ランダム効用」の概念として知られており、 V_j は「効用の確定項」、 ϵ_j は「効用の確率項」と呼ばれる．このランダム効用を導入することによって、

- 気紛れやその日の気分と言った、合理的選択行動からのズレ
- 選択肢に対する情報の欠如がもたらす、効用関数の不完全性
- 選択肢に対するデータの測定誤差

などが、考慮できることになる．

ランダム効用を導入すると、どの選択肢が選ばれるかは一意に決まらず、確率的に記述されることになる．W 君は仮定より、最も効用の高い選択肢を選ぶはずであるが、肝心の「最も効用の高い選択肢」が一意に定まらないことに気付けば、当然であろう．このとき、W 君が選択肢 1. のハンバーグ定食を選ぶ確率 P_1 は、ハンバーグ定食の効用 U_1 が、カツ定食の効用 U_2 を上回る確率、すなわち

$$\begin{aligned} P_1 &= \Pr[U_1 > U_2] \\ &= \Pr[V_1 + \epsilon_1 > V_2 + \epsilon_2] \\ &= \Pr[\epsilon_2 - \epsilon_1 \leq V_1 - V_2], \end{aligned} \quad (3)$$

また、2. のカツ定食を選ぶ確率 P_2 は

$$P_2 = 1 - P_1 \quad (4)$$

として、計算できることが分かる．

練習 11.2 上記の例を用いて、W 君が 1. ハンバーグ定食 (500 円, 800kcal.) を選ぶ確率、2. カツ定食 (450 円, 800kcal.) を選ぶ確率を具体的に計算してみよう．効用関数を決定するに当り、効用の確定項 V_j の係数は $(a, b) = (1, 1)$ とする．また、 ϵ_1, ϵ_2 は、それぞれ独立に平均 0、標準偏差 50 の正規分布に従うものとする．このとき、それぞれの定食を選択する確率 P_1, P_2 を求めなさい．

<ヒント> ϵ_1, ϵ_2 が、それぞれ独立に平均 0、標準偏差 50 の正規分布に従うとき、確率変数 $\epsilon_2 - \epsilon_1$ は、平均 0、標準偏差 $50\sqrt{2} \cong 70.71$ の正規分布に従う．したがって、当該正規分布の分布関数を $F_{\epsilon_2 - \epsilon_1}(x)$ とすると、求める確率 $P_1 = F_{\epsilon_2 - \epsilon_1}(V_1 - V_2)$ である．また、一般の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の分布関数 $F(x)$ の値は、標準正規分布の分布関数を $\Phi(x)$ としたとき、 $F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ なる関係式から求めることができる．なお、 $\Phi(x)$ の具体的な値は、Excel 関数 NORMSDIST() によって計算できる．

解答:

11.3 非集計ロジットモデル

前節では、離散選択モデルの基本となるアイデアと、昼食メニューの決定を題材にした一例を紹介した。練習 11.2 を実際に解くと判明することであるが、実は効用の確率項 ε_j の確率分布として正規分布を仮定すると、選択確率式に積分形が残ってしまうため、数学的な操作性が悪いことが知られている。なお、正規分布に従う確率項を想定した離散選択モデルは、特にプロビットモデルと呼ばれる。

そこで本節では、効用の確率項 ε_j に「ガンベル分布」という、正規分布に類似した確率分布を想定することによって、より高い数学的操作性を実現した、非集計ロジットモデルを概説する。

11.3.1 定式化

まず、前節における議論を一般化し、個人の効用を確率的に表現することによって、その選択確率を導出するランダム効用モデルの定式化について、まとめる。

ある個人が、 J 個の選択肢 (alternatives) で構成される選択肢集合 (choice set)

$$N \in \{1, 2, \dots, J\} \quad (5)$$

から、選択肢 j を選ぶ状況を考える。さらに個人は“何らかの規準”にしたがって

$$U_j = [\text{選択肢 } j \text{ を選んだときの効用 (utility)}] \quad (6)$$

を認識しており、選択肢集合 N の中から最も効用の大きい選択肢を選ぶものと仮定する。ここでの目的は、上述のような局面において、その個人がどの選択肢を選ぶのかを分析することである。

ここで、ある個人が選択肢 j を選んだときの効用 U_j を次のように与える：

$$U_j = V_j + \varepsilon_j, \quad (7)$$

$$V_j = [\text{効用の確定項}], \quad (8)$$

$$\varepsilon_j = [\text{確率的に変動する項}]. \quad (9)$$

V_j は、言わば分析者が推測した効用関数であり、個人さらには選択肢 j の測定可能な属性値を変数に持つ。このように推測した効用 V_j と、個人の実際の効用 U_j には乖離が生じることが予想される。この乖離を ε_j なる確率項で表現するわけである。この効用の確率項には、以下のような要因が含まれると考えられる：

1. 本来ならば考慮すべきであるにも拘らず、確定項に含まれなかった要因
— 抜け落ちた変数 (omitted variables)—
2. 確定項の関数形の誤差
3. 変数の測定誤差

以上の如く、効用を確率変数として捉えた場合、個人の選択行動を一意に特定することは不可能であり、確率的な事象として表現されることになる。いま当初の仮定より、選択肢 j が選ばれるためには、その効用 U_j が他の全ての選択肢の効用より大きければ良い。したがって、選択肢 j が選ばれる確率 P_j は以下のように記述できる：

$$P_j = \Pr[U_j > U_{j'} \text{ (for } \forall j' \in N, j' \neq j)]. \quad (10)$$

そして、(10) の具体的な式形は、効用の確率項 ε_j の確率分布を特定化することによって同定できることになる。

11.3.2 2項ロジットモデル

ランダム効用モデルの基本モデルとも言うべき、非集計ロジットモデルは、確率項 ε_j の具体的な確率分布としてガンベル (Gumbel) 分布を仮定することによって得られる。

母数 (α, λ) のガンベル分布は

〈累積分布関数〉

$$F(\varepsilon) = \exp[-\exp[-\lambda(\varepsilon - \alpha)]] \quad (11)$$

〈確率密度関数〉

$$f(\varepsilon) = \lambda \exp[-\lambda(\varepsilon - \alpha)] \exp[-\exp[-\lambda(\varepsilon - \alpha)]] \quad (12)$$

で与えられ、以下のような性質を持っている：

【性質 1】最頻値は α ，平均値は $\alpha + \frac{\gamma}{\lambda}$ (γ はオイラー定数 ≈ 0.577)。

【性質 2】分散は $\frac{\pi^2}{6\lambda^2}$ 。

【性質 3】 ε_1 と ε_2 が、それぞれ (α_1, λ) ， (α_2, λ) を母数とする、互いに独立なガンベル分布に従うとき、 $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ は以下のようなロジスティック分布に従う：

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \exp[\lambda(\alpha_2 - \alpha_1 - \varepsilon)]}$$

ガンベル分布の概形を図 1 に示す。

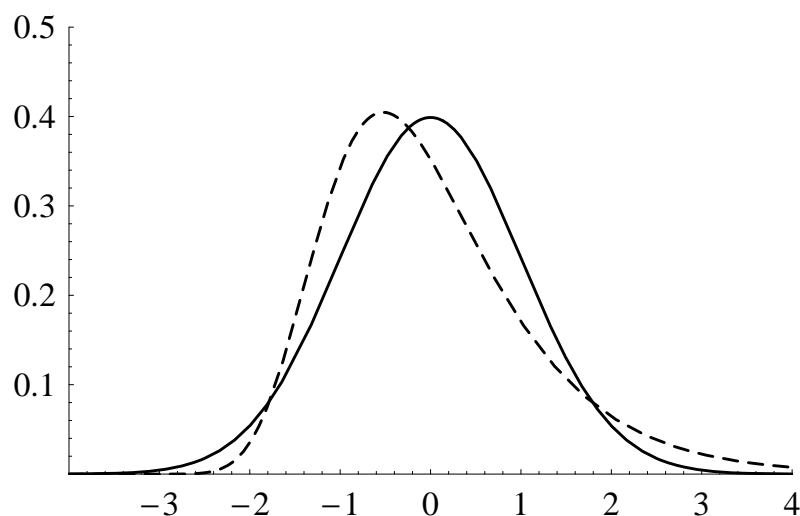


図 1 標準正規分布 (実線) とガンベル分布 (点線)。($\alpha = -0.52$, $\lambda = 1.1$)

以上を準備した上で、まずは選択肢が2つ、つまり

$$N \in \{1, 2\} \quad (13)$$

という場合の「2項ロジットモデル」を導く。定義に従って、 P_1 を導出すると、【性質3】より以下のように変形される：

$$\begin{aligned} P_1 &= \Pr [U_1 > U_2] \\ &= \Pr [V_1 + \varepsilon_1 > V_2 + \varepsilon_2] \\ &= \\ &= \\ &= \frac{\exp[\lambda V_1]}{\exp[\lambda V_1] + \exp[\lambda V_2]}. \end{aligned} \quad (14)$$

P_2 も、全く同様に算出でき

$$P_2 = 1 - P_1 = \frac{\exp[\lambda V_2]}{\exp[\lambda V_1] + \exp[\lambda V_2]} \quad (15)$$

となる。すなわち、2項ロジットモデルの選択確率式は、

2つの選択肢について、効用の確定項の指数を計算し、その値に応じて比例配分したもの

となり、極めて明解な数学式が得られる。

練習 11.3 W君が1. ハンバーグ定食(500円, 800kcal.)を選ぶ確率, 2. カツ定食(450円, 800kcal.)を選ぶ確率を2項ロジットモデルを用いて計算しなさい。ただし、効用の確定項 V_j の係数は練習 11.2 と同様に $(a, b) = (1, 1)$ とし、また、誤差項の標準偏差が約 50 となるよう $\lambda = 0.025$ とする。

解答:

11.3.3 多項ロジットモデル

今度は選択肢が J 個 ($J \geq 3$) の場合を想定した、「多項ロジットモデル」を導こう。先立って、ガンベル分布に関する以下の性質について述べておく：

【性質 4】 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_J$ が、それぞれ $(\alpha_1, \lambda), (\alpha_2, \lambda), \dots, (\alpha_J, \lambda)$ を母数とする、互いに独立なガンベル分布に従うとき、 $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_J)$ もガンベル分布に従い、その母数は以下ようになる：

$$\left(\frac{1}{\lambda} \ln \sum_{j=1}^J \exp[\lambda \alpha_j], \lambda \right).$$

多項ロジットモデルでは、各選択肢の効用の確率項 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_J$ が互いに独立で同一の (independently and identically distributed; IID) ガンベル分布に従うものと仮定する。ただし、一般性を失うことなく母数は $(0, \lambda)$ としよう。このとき、 j 番目の選択肢が選ばれる確率 P_j は、(10) より以下のように計算できる。まず、(7) を (10) に代入すると

$$P_j = \Pr \left[V_j + \varepsilon_j > \max_{j' \neq j} (V_{j'} + \varepsilon_{j'}) \right] \quad (16)$$

を得る。ここで

$$U_j' \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j' \neq j} (V_{j'} + \varepsilon_{j'}) \quad (17)$$

と置くと【性質 4】より U_j' は母数

$$\left(\frac{1}{\lambda} \ln \sum_{j' \neq j} \exp[\lambda V_{j'}], \lambda \right) \quad (18)$$

のガンベル分布に従う。すなわち

$$U_j' = V_j' + \varepsilon_j', \quad (19)$$

$$V_j' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda} \ln \sum_{j' \neq j} \exp[\lambda V_{j'}], \quad (20)$$

$$\varepsilon_j' \stackrel{\text{def}}{=} [\text{母数 } (0, \lambda) \text{ のガンベル分布に従う確率変数}] \quad (21)$$

と記述できる。これを (16) に代入すると、【性質 3】より以下のように変形される：

$$\begin{aligned}
P_j &= \Pr [V_j + \varepsilon_j > V'_j + \varepsilon'_j] \\
&= \Pr [\varepsilon'_j - \varepsilon_j \leq V_j - V'_j] \\
&= \text{-----} \\
&= \text{-----} \\
&= \text{-----} \\
&= \frac{\exp[\lambda V_j]}{\sum_{j \in N} \exp[\lambda V_j]}. \tag{22}
\end{aligned}$$

これが多項ロジットモデルにおける選択確率式である。2項ロジットモデルの場合と同様に、

各々の選択肢について、効用の確定項の指数を計算し、その値に応じて比例配分したもの

として、多項ロジットモデルの選択確率式も得られることが分かる。

練習 11.4 多項ロジットモデルにおいて、パラメータ λ を、(i) $\lambda \rightarrow 0$ にした場合、(ii) $\lambda \rightarrow \infty$ にした場合、どのような選択行動を表現するモデルとなるだろうか。それぞれの場合について、説明しなさい。

解答:

11.4 IIA 特性と赤バス・青バス問題

11.4.1 IIA 特性とは

多項ロジットモデルの選択確率式 (22) から、2つの選択肢 j_1, j_2 の選択確率の比を計算すると、以下の式を得る:

$$\frac{P_{j_1}}{P_{j_2}} = \frac{\frac{\exp[\lambda V_{j_1}]}{\sum_{j \in N} \exp[\lambda V_j]}}{\frac{\exp[\lambda V_{j_2}]}{\sum_{j \in N} \exp[\lambda V_j]}} = \frac{\exp[\lambda V_{j_1}]}{\exp[\lambda V_{j_2}]} \quad (23)$$

ここで注目すべきは、(23) が j_1 ならびに j_2 の効用確定項 “のみ” で構成されている点である。これは、2つの選択肢の選択確率の比が、その選択肢の確定効用のみで決定され、選択肢集合に含まれる他の選択肢の影響を受けないことを意味する。このような性質を「無関係な選択肢からの選択確率の独立性」または「IIA(independence from irrelevant alternatives) 特性」と呼ぶ。

少し別の表現もしてみよう。いま、2つの会い異なる選択肢集合 N_1 と N_2 があり、双方ともに選択肢 j_1 と j_2 を含んでいるものとする。このとき、集合 N_1 からそれらを選択するときの確率比と、集合 N_2 から選択するときの確率比が一致してしまうのである：

$$\frac{\frac{\exp[\lambda V_{j_1}]}{\sum_{j \in N_1} \exp[\lambda V_j]}}{\frac{\exp[\lambda V_{j_2}]}{\sum_{j \in N_1} \exp[\lambda V_j]}} = \frac{\frac{\exp[\lambda V_{j_1}]}{\sum_{j \in N_2} \exp[\lambda V_j]}}{\frac{\exp[\lambda V_{j_2}]}{\sum_{j \in N_2} \exp[\lambda V_j]}} = \frac{\exp[\lambda V_{j_1}]}{\exp[\lambda V_{j_2}]} \quad (24)$$

以上より、2つの選択肢の確率比は、(i) それら以外の選択肢の効用に依らず、(ii) 選択肢集合の別にも依らない。このことによる不都合は、次項で説明する赤バス・青バス問題によって明示される。

11.4.2 赤バス・青バス問題

以下のような例題を考えよう。2010年末、新幹線が新青森駅まで延伸し、東京駅から乗り換えることなく、新幹線(JR)で青森へ訪れることが可能となった。一方、羽田空港-青森空港間は以前から、JALが就航しており、飛行機を用いて青森を訪れる人々も数多い。では、東京から青森への移動手段として、JR(新幹線)とJAL(飛行機)が選択される確率は、いったいどれほどだろうか。ロジットモデルを用いて計算してみよう。

いま単純化のため、それぞれを移動手段として選択したときの「効用の確定項」が、互いに等しいものとしよう ($V_{JR} = V_{JAL} = V$)。本来は、運賃や時間、運行スケジュール、混雑など多岐に亘る項目が影響を及ぼすはずであるが、それらを合計した効用は、おおよそバランスが取れていると考えるわけである。このとき、各手段の選択確率はともに $1/2$ である：

$$P_{JR} = \frac{\exp[\lambda V_{JR}]}{\exp[\lambda V_{JR}] + \exp[\lambda V_{JAL}]} = \frac{\exp[\lambda V]}{\exp[\lambda V] + \exp[\lambda V]} = \frac{1}{2}; \quad (25)$$

$$P_{JAL} = \frac{\exp[\lambda V_{JAL}]}{\exp[\lambda V_{JR}] + \exp[\lambda V_{JAL}]} = \frac{\exp[\lambda V]}{\exp[\lambda V] + \exp[\lambda V]} = \frac{1}{2}. \quad (26)$$

ここで、JALと同程度のサービス内容を提供でき、かつ、現在は羽田-青森間に就航していない、ANAが新たに参入するものとしよう。ただし

1. ANAはJALとほぼ同スケジュールで運行する
2. ANAが参入したことによる混雑の緩和は乗客の効用に影響を与えない
3. JALとANAのサービス内容の差異は効用に影響しない

という3点が成り立つものとする。このとき、ANAの参入によって選択確率はどのように変化するだろうか。この場合は、 $V_{JR} = V_{JAL} = V_{ANA} = V$ が成立することになり、結果として各交通手段の選択確率は $1/3$ と

なることが分かる：

$$P_{JR} = P_{JAL} = P_{ANA} = \frac{\exp[\lambda V]}{\exp[\lambda V] + \exp[\lambda V] + \exp[\lambda V]} = \frac{1}{3}. \quad (27)$$

その結果、交通手段としての飛行機を選択確率は

$$P_{\text{飛行機}} = P_{JAL} + P_{ANA} = \frac{2}{3} \quad (28)$$

となる。このように、JAL のみが就航している場合の飛行機選択の確率 $1/2$ よりも増加してしまうのである。この例の場合、ANA の参入によって飛行機の効用が増加するわけではないので、選択確率の増加は不合理である。

では、なぜこのような矛盾が生じたのであろうか。それは選択者が本来認識している選択肢である、{新幹線, 飛行機} という交通手段の括りで分析を行わず、運行会社という一段下の位置決定階層である選択肢を提示してしまったからに他ならない。選択者は、もちろん JAL か ANA かという運行会社の相違は区別できる。しかし、交通手段としての飛行機の効用に、運行会社の差異が影響を与えないならば、{JR, JAL, ANA} という運行会社の括りで分析を行ってはいけないのである。以上は、ロジットモデルにおいて、選択肢の絞り込みを行う上で示唆的である。

なお、このような選択問題を正確に表現するためには、効用の確率項が互いに独立であるという仮定を緩めた、より一般的なモデルを提案することが望ましい。そのような IIA 特性を緩和したモデルの一つとしては、ネスティッドロジットモデルが挙げられるが、その内容は、本テキストの範疇を超えるため割愛する。

練習 11.5 現実の選択行動において、「赤バス・青バス問題」と同様の不都合が生じそうな例を考え、その概要を説明しなさい。

解答:

11.5 効用関数の設定と、パラメータ推定

効用関数としては、その扱いやすさを考慮し、線形のものがよく用いられる。いま

$$Z_j = [z_{j1}, z_{j2}, \dots, z_{jK}] \quad (29)$$

を個人が選択肢 j を選んだときの特性ベクトルとする。例えば交通手段選択を問題としているのならば、 Z_j は、所用時間や運賃、混雑度、天気、性別といった K 個の要素からなるベクトルである (ただし天気や性別は

普通 0-1 のダミー変数として導入される)。ここで、係数ベクトルを

$$\Theta = [\theta_{j1}, z\theta_{j2}, \dots, \theta_{jK}] \quad (30)$$

とし、選択肢 j を選んだときの、効用の確定項 V_j を次のように設定する：

$$V_j = \Theta Z_j^T = \theta_1 z_{j1} + \theta_2 z_{j2} + \dots + \theta_K z_{jK}. \quad (31)$$

本節の目的は、 M 人の選択実績データに基づいて、係数ベクトル Θ を最尤推定することである。ただし、 M 人のうちの m 番目の個人が、選択肢 j を選ぶときの特性ベクトルデータを

$$Z_j^{(m)} = [z_{j1}^{(m)}, z_{j2}^{(m)}, \dots, z_{jK}^{(m)}] \quad (32)$$

で与える。ここで、上記の線形効用関数に基づき、個人 m が選択肢 j を選んだときの効用を $V_j^{(m)}$ と置くと

$$V_j^{(m)} = \theta_1 z_{j1}^{(m)} + \theta_2 z_{j2}^{(m)} + \dots + \theta_K z_{jK}^{(m)} \quad (33)$$

となる。

$Z_j^{(m)}$ は個人 m と選択肢 j が与えられれば客観的に計量できる。一方、 Θ については未知の係数ベクトルであり、これを推定しなければ選択確率を特定できない。ここでは、「最尤推定」によってこれを行う。ただし、観測によって

個人 m は選択肢 j_m を選択した ($m = 1, 2, \dots, M$)

ことが判明しているものとする。非集計ロジットモデルに基づくと、個人 m が選択肢 j_m を選ぶ確率は

$$P_{j_m}^{(m)} = \frac{\exp[\lambda V_{j_m}^{(m)}]}{\sum_{j \in N} \exp[\lambda V_j^{(m)}]} \quad (34)$$

である。これを、全ての m について掛け合わせたものが尤度関数 L である：

$$L = \prod_{m=1}^M P_{j_m}^{(m)}. \quad (35)$$

最尤推定では、 L が最も大きくなるようにパラメータ Θ を決定すればよい。これは、 M 人による選択結果 $\{j_1, j_2, \dots, j_M\}$ が実現したのは、その実現確率が大きかったからに他ならない、という理屈に基づくものである。ここで、対数関数の単調増加性により、 L を最大化することと

$$L^* = \ln L = \sum_{m=1}^M \ln P_{j_m}^{(m)} \quad (36)$$

を最大化することは透過である。ただし、

$$\ln P_{j_m}^{(m)} = \lambda V_{j_m}^{(m)} - \ln \sum_{j \in N} \exp[\lambda V_j^{(m)}] \quad (37)$$

である．この式のなかで

$$\lambda V_j^{(m)} = \lambda \left(\theta_1 z_{j1}^{(m)} + \theta_2 z_{j2}^{(m)} + \cdots + \theta_K z_{jK}^{(m)} \right) \quad (38)$$

の通り， λ は全ての θ_k に一律に乗ぜられている．したがって， λ を推定する必要はなく， $\lambda = 1$ と置いて， θ_k ($k = 1, 2, \dots, K$) のみを推定しさえすればよい．以上から，最大化すべき関数 L^* は次のように記される：

$$\begin{aligned} L^* &= \sum_{m=1}^M \left(V_{j_m}^{(m)} - \ln \sum_{j \in N} \exp [V_j^{(m)}] \right) \\ &= \sum_{m=1}^M \left(\sum_{k=1}^K \theta_k z_{j_m k}^{(m)} - \ln \sum_{j \in N} \exp \left[\sum_{k=1}^K \theta_k z_{j k}^{(m)} \right] \right). \end{aligned} \quad (39)$$

L^* は $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$ の凹関数であることが分かっている．したがって，その最大化は Newton 法をはじめとする数値最適化法によって実現可能である．

11.6 マーケティングへの応用例

本節では，非集計ロジットモデルの応用例として，マーケティング分野における商圈分析への応用について紹介する．

11.6.1 ハフモデル

選択行動として，多数ある店舗のなかから，買い物へ出かける店舗を 1 つ選ぶ状況を考えよう．例えば日用品，食料，服飾，高額商品など，ここでは特に指定しない．さて，あなたは，どのような基準に基づいて，買い物へ出かける店舗を選択するだろうか．もちろん，選択に当っては様々な属性が影響する．店舗のブランド，品揃え，利便性，ポイントシステム等々，枚挙に暇が無い．しかしながら，見通しの良い数理モデルを構築するため，店舗の選択行動を極度に単純化してみたとき，

- できるだけ店舗が大きく (魅力があつて)
- できるだけ自身の住居から近い店舗を

選ぶとは考えられないだろうか．

いま，自身の周りに J 個の店舗が存在し ($N \in \{1, 2, \dots, J\}$)，住居から各店舗までの距離 d_j ，そして店舗の魅力度 S_j が判明しているものとしよう．ここで，店舗の魅力度とは，選択を行う個人が，どれだけ当該店舗に魅力を感じているか数値化したものであり，例えば，店舗の敷地面積や延床面積などを用いることも多い (大きい店舗は魅力的!!)．

自然に考えれば，住居からの距離が近く，魅力度の大きい店舗ほど，選択したときの効用は大きくなるであろう．そこで，個人が，店舗 j を選択したときの効用 V_j を

$$V_j = -a d_j + b \ln S_j \quad (40)$$

と置くことにする．効用が距離に正比例し減少することについては，特に説明の必要はないだろう．一方，効用と魅力度の関係を見てみると，魅力度の増加は効用の増加をもたらすものの，その効果は対数 ($\ln S_j$) となっている．これは，

人間の感覚の主観的大きさは刺激強度の対数に比例して増大する

という Fechner の法則を援用してのことである．以上を想定し，店舗 j が選択される確率 P_j を，ロジットモデルを用いて導出すると，(40) を (22) に代入し

$$\begin{aligned} P_j &= \frac{\exp[\lambda V_j]}{\sum_{j \in N} \exp[\lambda V_j]} \\ &= \frac{\exp[\lambda(-a d_j + b \ln S_j)]}{\sum_{j \in N} \exp[\lambda(-a d_j + b \ln S_j)]} \\ &= \frac{S_j^\alpha \exp[-\gamma d_j]}{\sum_{j \in N} S_j^\alpha \exp[-\gamma d_j]} \end{aligned} \quad (41)$$

を得る ($\alpha = b\lambda, \gamma = b\lambda$)．(41) は，(その原型が 1964 年に Huff によって提案されていることから，) 特に指数型ハフモデルとも呼ばれ，マーケティング分野における商圈分析で必須のモデルとなっている．

11.6.2 商圈分析への展開

商圈とは、ある商業施設(店舗)が影響を及ぼす地理的な範囲をいう．商圈の正確な把握は，適切な広告戦略や設備投資の参考とするために，マーケティングにおける重要な事項である．そこで，ここでは上述のハフモデルを用いた商圈分析への展開と，その応用について紹介する．

店舗のマーケティング担当者が商圈を把握するに当り，最も重要視するのは，「どの地域の住民が，どの程度の頻度で訪問してくれるか」ということであろう．これは，(住民がモデルに従うものと仮定すれば，) 様々な地点において前項で述べたハフモデルの選択確率を導出することに他ならない．具体的には，住民が地点 (x, y) に居住しているものとし，当該地点から各店舗までの距離を $d_j(x, y)$ と記述すると，地点 (x, y) の住民が店舗 j を訪れる確率は

$$P_j(x, y) = \frac{S_j^\alpha \exp[-\gamma d_j(x, y)]}{\sum_{j \in N} S_j^\alpha \exp[-\gamma d_j(x, y)]} \quad (42)$$

となる．したがって， $P_j(x, y)$ を 2 変数関数と見做して計算し，それを等高線や 3D プロット，濃淡表示などによってグラフ化すれば，各店舗の商圈範囲が描けることになる．

以上によって商圈分析は行える訳であるが，マーケティング分析として，これだけでは不十分である．実際には，店舗にどれだけの人数が訪問してくれるのか，そして，自店舗の顧客が多い地域はどこなのかなど，都市の人口分布を明示的に考慮した議論が必要となってくる．

都市の人口分布は，総務省・統計局による国勢調査によって集計されているものが，最も知られている(5年に一度調査される．CM や実際の調査アンケートを目にした人も多いのでは??)．国勢調査では，町丁目別な

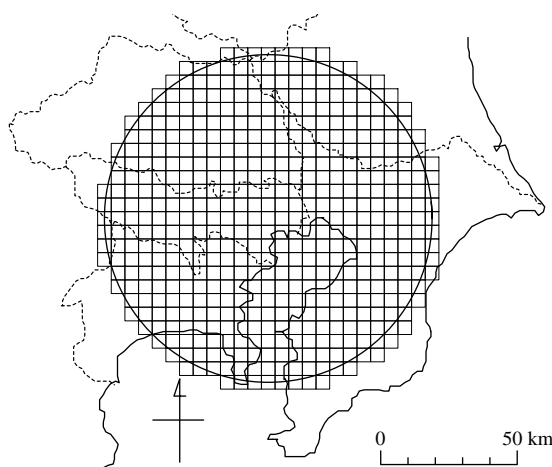


図2 東京地方における 5km メッシュ

らびに地域メッシュ別に，人口を始めとした数多くの項目が集計されている．ここでは，地域メッシュによる集計について，もう少し解説を加えよう．

地域メッシュとは，緯度・経度に基づいて地域をほぼ同じ大きさの網の目(メッシュ)に分けたものである．日本では，総務省が定めた「統計に用いる標準地域メッシュおよび標準地域メッシュ・コード」規格によって，基準化がなされている．地域メッシュを用いることによって，日本国全体を約 1km 四方の長方形に細かく区分することができる(3次メッシュ)．したがって国勢調査を用いると，日本国の人口は約 1km 四方の長方形の区画ごとに把握することができる．なお，東京など一部の大都市においては約 500m 四方の長方形単位でも区分されており(4次メッシュ)．逆に，いくつかの 1km メッシュを合算することによって，5km メッシュや 10km メッシュなども作成可能である．図2に，東京地方を 5km メッシュによって区分した例を示す．

さて，地域メッシュによる人口分布を用いると，前述した顧客数に関する議論が，更に展開できる．いま，分析する店舗の対象地域が，計 I 個のメッシュによって分けられ， $i = 1, 2, \dots, I$ と番号が付けられているものとする．さらに，メッシュ i の人口は O_i で，メッシュの中心点の座標は (x_i, y_i) で与えられているものとする．このとき，この O_i 人の店舗選択行動，すなわち店舗 j を選択する確率は，

$$P_j(x_i, y_i) = \frac{S_j^\alpha \exp[-\gamma d_j(x_i, y_i)]}{\sum_{j \in N} S_j^\alpha \exp[-\gamma d_j(x_i, y_i)]} \quad (43)$$

と見做すことができよう．すると，メッシュ i に居住する人のうち，店舗 j を訪問する人数は，各人が単位期間当たり 1ヶ所の店舗を訪問するものとする

$$O_i \cdot P_j(x_i, y_i) = O_i \frac{S_j^\alpha \exp[-\gamma d_j(x_i, y_i)]}{\sum_{j \in N} S_j^\alpha \exp[-\gamma d_j(x_i, y_i)]} \quad (44)$$

で概算できることになる．これを，全てのメッシュについて計算すれば，自店舗の顧客が多い地域はどこのかが把握できる訳である．また，店舗 j を訪問してくれる総顧客数 D_j についても，

$$D_j = \sum_{i=1}^I O_i \cdot P_j(x_i, y_i) \quad (45)$$

で計算できることが分かる。

11.6.3 最適立地点の導出

本テキストの最後に、店舗の最適立地点導出についても考察する。前項によって、店舗 j を選択する確率は $P_j(x_i, y_i)$ と記述され、対象の人々がどこに居住しているのか、その地点 (x_i, y_i) に依存することを説明した。しかしながら、実際には住居の位置のみならず、各店舗の位置によっても選択確率は変化する。具体的には、店舗 j の立地点を $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j)$ とすると、地点 $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ に居住する人が、店舗 j を選択する確率は、各店舗の位置の関数となり

$$P_j(\mathbf{x}_i, \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_J\}) = \frac{S_j^\alpha \exp[-\gamma d(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_j)]}{\sum_{j \in N} S_j^\alpha \exp[-\gamma d(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_j)]} \quad (46)$$

となるはずである。ここで $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_j)$ は地点 \mathbf{x}_i と地点 \mathbf{u}_j の距離を意味する。このとき、店舗 j へ訪問する顧客数は、前項と同様の議論により

$$D_j(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_J\}) = \sum_{i=1}^I O_i \cdot P_j(\mathbf{x}_i, \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_J\}) \quad (47)$$

となる。各店舗がどのように配置されているかによって、その顧客数が影響を受けるのは当然！

(47) が判明すれば、店舗の最適立地点についても考察が可能である。具体的な例として、いま店舗 j が移転計画として、新たな立地点を模索しているものとしよう。このとき、他の店舗がその位置を変えないものとする、店舗 j が地点 \mathbf{u}_j に立地したときの予想獲得顧客数は

$$D_j(\mathbf{u}_j | \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_J\}) \quad (48)$$

と変形できる。つまるところ、店舗 j の最適な移転位置は

$$\max_{\mathbf{u}_j} D_j(\mathbf{u}_j | \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_J\}) \quad (49)$$

なる最適化問題を解くことによって、求められることが判明する。

参考文献

- [1] 土木学会編 (1995)：非集計行動モデルの理論と実際，土木学会。
- [2] 石川義孝 (1988)：空間的相互作用モデル—その系譜と体系—，地人書房。
- [3] 北村隆一，森川高行 (2002)：交通行動の分析とモデリング，技報堂。
- [4] Train, K. (2003)：Discrete Choice Methods with Simulation，Cambridge University Press。